double cosets の対応と Hecke 環の指標の対応について(群論と組合せ数学)

川中, 宣明

数理解析研究所講究録
794巻 1992年 187-194

double cosets の対応と Hecke 環の指標の対応について

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

1. Hecke 環についての一般論

G を有限群, H と K をその部分群とし

$$\varepsilon_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \quad , \quad \varepsilon_K = |K|^{-1} \sum_{k \in K} k \quad (\in \mathbb{C}[G])$$

とおく. $\mathbb{C}[G]$ の部分代数

$$\mathcal{H}(H \backslash G / K) = \varepsilon_H \, \mathbb{C}[G] \, \varepsilon_K$$

を Hecke 環と呼ぶことにする. $H = K$ の場合の [1 ; §11D] の議論を真似て, $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の表現についての一般論を作ることができる. ($\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は, 一般には, 半単純ではないし, 単位元も持たないことに注意.)

以下, H と K を固定し, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(H\backslash G/K)$ と置く. また $\hat{G} = \{G$ の既約指標$\} = \{\mathbb{C}[G]$ の既約指標$\}$, $\hat{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}$ の既約指標$\}$ であり, $\chi \in \hat{G}$ に対し, $m_H(\chi)$, $m_K(\chi)$ は, χ の誘導指標 $1_H{}^G$, $1_K{}^G$ での重複度である.

(1) $\mathcal{H}$: semisimple $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$ が単位元を持つ.

(2) $\chi \in \hat{G} \Rightarrow \chi | \mathcal{H} \equiv 0$ または $\chi | \mathcal{H} \in \hat{\mathcal{H}}$

(3) $\hat{\mathcal{H}}$ の任意の元に対し (2) のような χ が唯一つある.

(4) $x \in G$ に対し

$$\mathrm{ind}\, x = \mathcal{H}\text{-}\mathrm{ind}\, x = \frac{|HxK|}{|H \cap K|},$$

とおく. また, $[x] = [x]_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\text{-}\mathrm{ind}\, x \cdot \varepsilon_H\, x\, \varepsilon_K$

とおく. $H \backslash G / K$ の完全代表系 $\{x_i\}_{i \in I}$ に対し

$$\{\, [x_i] \mid i \in I \,\}$$

は $\mathcal{H}$ の $\mathbb{Z}$-basis. (構造定数 $\in \mathbb{Z}$)

(5) $\chi, \chi' \in \hat{G}$ に対し

$$\chi(1)\, |G|^{-1} |H \cap K| \sum_{i \in I} (\mathrm{ind}\, x_i)^{-1}\, \overline{\chi([x_i])}\, \chi'([x_i])$$

$$= \begin{cases} \chi(\varepsilon_H \varepsilon_K) & (\chi = \chi' \text{ のとき}) \\ 0 & (\chi \neq \chi' \text{ のとき}) \end{cases}$$

(6) $\mathcal{H}$ が半単純 $\Longrightarrow$ $m_H(\chi)\, m_K(\chi) = 0$ または $m_H(\chi) = m_K(\chi)$ が任意の $\chi \in \hat{G}$ に対し成立.

(7) 任意の $\chi \in \hat{G}$ に対し $m_H(\chi)\, m_K(\chi) = 0$ または $m_H(\chi) = m_K(\chi) = 1$ が成り立つとする. このとき

(7a) $\mathcal{H}$ は可換

(7b) $\mathcal{H}$ は半単純 $\Longleftrightarrow$ $m_H(\chi) = m_K(\chi) = 1$ となる任意の $\chi \in \hat{G}$ に対し, $\chi | \mathcal{H} \neq 0$

(7c) $$\chi(\varepsilon_H \times \varepsilon_K) = \frac{(x v_K^\chi,\ v_H^\chi)(v_H^\chi,\ v_K^\chi)}{(v_H^\chi,\ v_H^\chi)(v_K^\chi,\ v_K^\chi)}, \quad x \in G,$$

ただし，v_H^χ，v_K^χ は，χ の表現空間における零でない H-固定，K-固定ベクトルで，$(\cdot,\cdot)$ は G-不変な内積．特に (7b) と合わせると，

$$\mathcal{A}：半単純 \iff m_H(\chi)\,m_K(\chi)=0 \ \text{または}\ (v_H^\chi, v_K^\chi)\neq 0$$

2. double cosets の対応

2.1. 一般的な枠組み

位数 $2m$ の二面体群

$$D_m = \langle F, \theta \mid \theta^2=(F\theta)^2=F^m=1 \rangle$$

が，群 G に作用しているとする．D_m の部分群，$\langle\theta\rangle$，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & D_m \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle\theta\rangle \arrow[dr, dash] & \langle F\theta\rangle \arrow[d, dash] & \langle F\rangle \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & K \arrow[d, dash] & L \arrow[dl, dash] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

$\langle F\theta\rangle$，$\langle F\rangle$，D_m による G の固定部分群をそれぞれ，H，K，L，M とする．$\theta(L)\subset L$ であること，L における θ の固定部分群は M であること，$H\cap K = M$ であることに注意しておく．以下で考えたいのは $H\backslash G/K \longrightarrow M\backslash L/M$ のタイプの対応である．

2.2. Glauberman [3] および新谷 [4] の結果の言いかえ

G_1 を群とし, $G = G_1 \times G_1$ とおく. α を G_1 の位数 m の自己同型とする. $\theta, F \in Aut(G)$ を

$$\theta : (x, y) \longrightarrow (y, x)$$

$$F : (x, y) \longrightarrow (\alpha(x), \alpha^{-1}(y)), \quad x, y \in G_1$$

により定義すると, $D_m \cong \langle \theta, F \rangle$ となる. 2.1 のように, H, K, L, M を定義する.

例 2.2.1. $(|G_1|, m) = 1$ とする. $\{ l_i \mid i \in I \} < L$ を

$$L = \coprod_{i \in I} M l_i M$$

となるようにとると

$$G = \coprod_{i \in I} H l_i K$$

であり, しかも

$$\frac{|H l_i K|}{|H|\,|K|} = \frac{|M l_i M|}{|M|^2}, \quad i \in I,$$

が成り立つ. これは Glauberman の結果の言いかえである.

例 2.2.2. $\mathbb{F}_q$ を元数 q の有限体, $\langle \alpha \rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^m} / \mathbb{F}_q)$ とする. α は $G_1 = GL_n(\mathbb{F}_{q^m})$ の自己同型を引きおこす.

任意の $g \in G$ に対し

$$H \underbrace{g F\theta(g)^{-1} F(g) F^2\theta(g)^{-1} F^2(g) F^3\theta(g)^{-1} \cdots}_{m\text{項}} H \supset MlM$$

となるような $M \backslash L / M$ の元 MlM が唯一つ存在し，$HgK \longmapsto MlM$ は，$H \backslash G / K$ から $M \backslash L / M$ の上への1対1対応になる．しかも，

$$\frac{|HgK|}{|H||K|} = \frac{|MlM|}{|M|^2} \quad (HgK \longleftrightarrow MlM)$$

これは，新谷の結果の言いかえである．

2.3. 奇位数の群，Brauer-Wielandt の結果[5]との関連

ここでは，2.1 よりもう少し一般的な枠組みで考える．

$\langle\sigma\rangle$ を位数 n の巡回群とし，半直積群

$$A = \langle\sigma\rangle \rtimes D_m = \langle \sigma, F, \theta \mid \sigma^n = F^m = \theta^2 = (F\theta)^2 = (\sigma\theta)^2 = (\sigma F\theta)^2 = 1 \rangle$$

を考える．A が有限群 G に作用しているとする．さらに

$$(|A|, |G|) = 1$$

を仮定する．特に，$|G|$ は奇数．よって Feit-Thompson の定理により可解である．

定理　$\sigma, \sigma F$ による G の不動点集合を G^σ, $G^{\sigma F}$ と書く．

$\{x_i \mid i \in I\} \subset G^\sigma \cap G^{\sigma F}$ を

$$G^\sigma = \coprod_{i \in I} (G^\sigma)^\theta x_i (G^\sigma)^{F\theta} \quad (\text{disjoint})$$

となるようにとることができる．さらに，このとき

$$G^{\sigma F} = \coprod_{i \in I} (G^{\sigma F})^\theta x_i (G^{\sigma F})^{F\theta}$$

および

$$\frac{|(G^{\sigma})^{\theta}x_i(G^{\sigma})^{F\theta}|}{|(G^{\sigma})^{\theta}||(G^{\sigma})^{F\theta}|}=\frac{|(G^{\sigma F})^{\theta}x_i(G^{\sigma F})^{F\theta}|}{|(G^{\sigma F})^{\theta}||(G^{\sigma F})^{F\theta}|},\ i\in I$$

が成り立つ.

系として Brauer-Wielandt の位数公式

$$\frac{|G^{\sigma}|}{|(G^{\sigma})^{\theta}||(G^{\sigma})^{F\theta}|}=\frac{|G^{\sigma F}|}{|(G^{\sigma F})^{\theta}||(G^{\sigma F})^{F\theta}|}$$

が得られる. $m=n=2$, $\sigma=id.$ の場合(Brauer が示した場合)が, 特に有名で, よく用いられる(らしい).

2.4. Flensted-Jensen の結果[2]

詳細は省くが, 2.3 の定理と形式的に酷似した結果を, Flensted-Jensen が, 複素半単純リー群 G と

$$A=\langle\sigma,F,\theta\mid\sigma^2=F^2=\theta^2=(\sigma F)^2=(F\theta)^2=(\sigma\theta)^2=1\rangle$$

に対して示している. 但し $\langle\sigma\rangle=Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, $\theta|G^{\sigma}$ は Cartan involution である.

2.5. $Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})\backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})/U_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$

2.1 の記号のもとで, $G=GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $\langle F\rangle=Gal(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$,

$$\theta(x)=J\,{}^tx^{-1}J^{-1}\quad\left(x\in G,\ J=\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\right)$$

とする. よって, $H=Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $K=U_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ (ユニタリ群), $L=GL_{2n}(\mathbb{F}_q)$, $M=Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ である.

定理 任意の $g \in G$ に対し

$$HgF\theta(g)^{-1}H \supset MlM$$

となるような $M\backslash L/M$ の元 MlM が唯一つ存在し，$HgK \longmapsto MlM$ は $H\backslash G/K$ から $M\backslash L/M$ の上への1対1対応になる．しかも

$$\frac{|HgK|}{|H||K|} = \frac{|MlM|}{|M|^2} \quad (HgK \longleftrightarrow MlM)$$

3. Hecke 環の指標の対応

2.2 の 2つの例の場合，$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の既約指標 χ の全体と $\mathcal{H}(M\backslash L/M)$ の既約指標 ψ の全体との間に

$$|G|^{-1}\chi(1)\,\chi([g]_{\mathcal{H}(H\backslash G/K)}) = |L|^{-1}\psi(1)\,\psi([l]_{\mathcal{H}(M\backslash lM)}),$$

を満たすような1対1対応 $\chi \longleftrightarrow \psi$ がある．ただし，$\chi(1)$, $\psi(1)$ は，χ, ψ の G, L の指標としての次数であり，HgK と MlM は 2.2 の意味で対応しているものとする．この結果も，新谷と Glauberman の結果の言い換えである．全く同様の結果が 2.5 の場合にも成り立つことが示される．2.3 の場合でも，χ が monomial な指標なら同様の等式が成立するような ψ が存在するが，一般には修正が必要となる．2.4 の場合は，上で引用した

Flensted-Jensen の論文に，このタイプの結果が証明されている．

文献

[1] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory, vol.1, Wiley-Interscience, 1981.

[2] M. Flensted-Jensen, Spherical functions on a real semisimple Lie group. A method of reduction to complex case. J. Funct. Anal. 30 (1978), 106-146.

[3] G. Glauberman, Correspondences of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. 20 (1968), 1465-1488.

[4] T. Shintani, Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396-414.

[5] H. Wielandt, Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe, Math. Z. 73 (1960), 146-158.